حل دورة 2016 التكميلية

1-ان حلقة الاعداد الحقيقيه مثاليه في حلقة الاعداد العقديه (خطأ) لأن :

$$i \in C , a \in R \Rightarrow i.a \notin R$$

2- ان حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ فوق حلقة الاعداد الصحيحه Z تحقق خاصية الاختصار (خطأ) لانها تحوي قواسم للصفر

$$\left\{M_2(Z) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a,b,c,d \neq 0 \in Z\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3- ان المجموعه $R = \{0,2,4,6,8\}$ بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 10 تشكل حقلا (صح) لأنها واحدية والحيادي هو 6 ولاتحوي قواسم للصفر ولكل عنصر يملك مقلوب

$$2^{-1} = 8 \;\; , 4^{-1} = 4 \; , 6^{-1} = 6 \; , 8^{-1} = 2$$

$\cdot \, mod\ 10$	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2	0	4	8	2	6
4	0	8	6	4	2
6	0	2	4	6	8
8	0	6	2	8	4

4-المثالية $5Z$ حد مباشر في حلقة الأعداد الصحيحة Z (خطأ) لأن العنصر 5 ليس جامدا في Z

5-مميز حلقة الخارج $3Z/_{12Z}$ يساوي 6 (خطأ) يساوي الـ 4

$$3Z/_{12Z} = \{0 + 12Z , 3 + 12Z , 6 + 12Z, 9 + 12Z\}$$

$.mod12$	$0 + 12Z$	$3 + 12Z$	$6 + 12Z$	$9 + 12Z$
$0 + 12Z$	$0 + 12Z$	$0 + 12Z$	$0 + 12Z$	$0 + 12Z$
$3 + 12Z$	$0 + 12Z$	$9 + 12Z$	$6 + 12Z$	$3 + 12Z$
$6 + 12Z$	$0 + 12Z$	$6 + 12Z$	$0 + 12Z$	$6 + 12Z$
$9 + 12Z$	$0 + 12Z$	$3 + 12Z$	$6 + 12Z$	$9 + 12Z$

حلقة الخارج واحدية والحيادي فيها هو $e = 9 + 12Z$ لنبحث عن اصغر عدد طبيعي مضروب يساوي الصفر

$$2.e = 6 + 12Z \qquad 3.e = (3 + 12Z) \quad \underbrace{\mathbf{4}e = 0 + 12Z}_{\text{المميز } 4}$$

6-ان حلقة الخارج $Z_{12}/_{6Z_{12}}$ واحدية لأن Z_{12} حلقة واحدية (صح) أعتمادا على A واحدية فإن $R/_{A}$ واحديه

7-**اذا كانت $B = 15Z$ و $A = 5Z$ مثاليتين في Z فإن $A.B = A \cap B$** (خطأ) لأن:

$$l_1 = A.B = 5Z.15Z = \mathbf{75Z} \neq l_2 = A \cap B = 5Z \cap 15Z = lcm(5,15)Z = \mathbf{15Z}$$

8-**ان العنصر $(0,3)$ جامد وقاسم للصفر في الحلقة $Z_3 \oplus Z_6$** (صح) لأن

جامد لأن $(0,3)(0,3) = (0mod3,9mod6) = (0,3)$

قاسم للصفر لأن $(0,3)(2,2) = (0mod3,6mod6) = (0,0)$

9--**ان الحلقة $(Z_{25},+,.)$ حلقة موضعيه** (صح) لأنها تملك مثالية اعظمية واحده هي $\langle 5 \rangle$

10-اذا كانت $\boldsymbol{R = (Z_4,+,.)}$ فإن $J(R) = \langle 3 \rangle$ (خطأ) $J(R)$ هو تقاطع لجميع المثاليات الاعظميه الموجوده في Z_4 والمثاليات الاعظميه الموجوده في Z_4 هي $\langle 2 \rangle$ ومنه $J(R) = \langle 2 \rangle$

11-**اذا كانت $A = \langle 8 \rangle$ مثالية في حلقة الاعداد الصحيحه Z فإن $radA = \langle 4 \rangle$** (خطأ) $radA = \langle 2 \rangle$

12--**اذا كانت $B = 4Z$ و $A = 6Z$ مثاليتين في Z فإن $A{:}B = 12Z$** (خطأ)

لنوجد $6Z{:}4Z$ و$4Z$ و $6Z$ مثاليتين في الحلقة Z عندئذ:

.	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	…..
$4Z$	0	$4Z$	$8Z$	$12Z$	$16Z$	$20Z$	$24Z$	… …
الأحتواء في$6Z$	$\subseteq 6Z$	$\nsubseteq 6$	$\nsubseteq 6Z$	$\subseteq 6Z$	$\nsubseteq 6Z$	$\nsubseteq 6Z$	$\subseteq 6Z$	… …

اذا العناصر المحتواة في $6Z$ هي $\{0,\pm 3,\pm 6,\pm 9,\dots\}$ وهي عناصر $3Z$ ومنه نكتب

$$6Z{:}4Z = 3Z$$

13-**ان المثالية $5Z \cap 3Z$ اولية في حلقة الاعداد الصحيحه Z** (خطأ)

$3 \times 5 = 15 \in 15Z$, $3Z \cap 5Z = 15Z$ولكن $3 \notin 15Z$ ولا $5 \notin 15Z$

14-**اذا كانت $R = Z_{27}$ فإن $5 \in radR$** (خطأ) لأن الــ 5 ليس عديم القوى أو$5 \notin radR = \langle 3 \rangle$

15-ان الحدوديه $f(x) = x^2 + 1$ هي حدودية أوليه فوق Z_5 (خطأ) غير أوليه

لدينا $f(x)$ من الدرجة الثانيه و Z_5 حقل لان ال5 عدد اولي وحسب المبرهنه -اذا ملكت الحدوديه $f(x)$ فوق الحقل Z_p اصفار نقول عنها غير اوليه (بحيث $f(x)$ من الدرجة الثانيه او الثالثه)

وهي تملك صفرين

$$f(0) = 1\,, \quad f(1) = 2\,, \underbrace{f(2) = 5mod5 = 0}_{\text{صفر}}, \underbrace{f(3) = 10mod5 = 0}_{\text{صفر}}, f(4) = 2$$

****

الأستاذ:حسين علي